OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 10 FEBRUARIE 2024

Clasa a VII-a

Problema 1.

a) Arătați că $\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}=\sqrt{\frac{n+1}{2}}+\sqrt{\frac{n-1}{2}}$, pentru orice n număr natural nenul.

b) Demonstrați că : $\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}}+\frac{1}{\sqrt{6+\sqrt{35}}}+...+\frac{1}{\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}}}>\sqrt{n}-1$

Soluție:

a) $\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}$ $\Rightarrow \sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}=\sqrt{\frac{n+1}{2}}+\sqrt{\frac{n-1}{2}}$ …………4p

$A=n, B=n^2-1 \Rightarrow C^2=1, C=1$

b) $\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}} \xrightarrow{a)} \sqrt{\frac{2n+1}{2}}+\sqrt{\frac{2n-1}{2}}$ …………………………………..1p

$$\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}}+\frac{1}{\sqrt{6+\sqrt{35}}}+...+\frac{1}{\sqrt{2n+\sqrt{4n^2-1}}}=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}\right)=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\sqrt{3}-1+\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{5}+...+\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\right)$$ ………………….1p

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-1+\sqrt{2n+1}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}>\sqrt{n}-1$$ ……………………………………..1p

Problema 2.

a) Fie a și b - două numere naturale nenule. Arătați că $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ este rațional dacă și numai dacă a și b sunt pătrate perfecte.

b) Fie a,b și c numere naturale nenule. Arătați că, dacă numerele $\sqrt{a^2+b+c+1},\sqrt{b^2+c+a+1}$ și $\sqrt{c^2+a+b+1}$ sunt raționale atunci $a=b=c$.

Soluție:

a)

$\Leftarrow$

$a,b\in\mathbb{N}^* -$ pătrate perfecte $\Rightarrow \exists k,l\in\mathbb{N}^* a.î\ a=k^2, b=l^2 \Rightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b}=k+l\in\mathbb{Q}$ ……………1p

$\Rightarrow$

$a,b\in\mathbb{N}^*, \sqrt{a}+\sqrt{b}=x\in\mathbb{Q}^* \Rightarrow \sqrt{b}=x-\sqrt{a}$ ……………………………………………………….1p

$\Rightarrow b=x^2+a-2x\sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{a}=\dfrac{x^2-a-b}{2x}\in\mathbb{Q}\Rightarrow a-$ pătrat perfect. ……………………………………………1p

b)Presupunem ca expresiile de sub radical sunt pătrate perfecte. Evident, $a^2+b+c>a^2$. Dacă $a^2+b+c+1$este pătrat perfect , valoarea acestui pătrat este cel puțin $(a+1)^2$. ……………………..1p

Deci,

$$a^2+b+c+1\ge(a+1)^2\Rightarrow b+c\ge 2a,\ b^2+a+c+1\ge(b+1)^2\Rightarrow a+c\ge 2b,$$
$$c^2+b+a+1\ge(c+1)^2\Rightarrow b+a\ge 2c$$ ……………………1p

$\Rightarrow a+b+2c\ge 2(a+b)\Rightarrow a+b\le 2c, a+b\ge 2c\Rightarrow a+b=2c$ ………………………………1p

Analog $b+c=2a,\ a+c=2b$

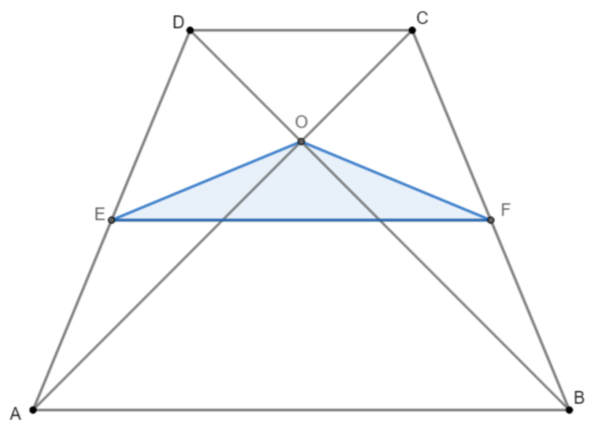
$\Rightarrow a=b=c$ ……………………………………………………..1p

Problema 3. Fie $ABCD$un trapez isoscel $(AB\,||\,CD)$cu diagonalele perpendiculare. Notăm $AC\cap BD=\{O\}$, iar punctele E și F mijloacele laturilor neparalele. Știind că $EF=7\sqrt{2}\ cm$, iar perimetrul trapezului este de $2\cdot(10+7\sqrt{2})\ cm$, aflați:

a) Perimetrul triunghiului OEF .
b) Înălțimea trapezului și laturile neparalele.

Aria trapezului.

Soluție:



a) $OE=\dfrac{AD}{2}, OF=\dfrac{BC}{2}$ …….…………..…1p

$EF=\dfrac{AB+CD}{2}\Rightarrow$ …………………………1p

$P_{\Delta OEF}=(10+7\sqrt{2})cm$ …………………………1p

b) $EF=7\sqrt{2}\ cm \xrightarrow{a)} OE+OF=10\ cm\Rightarrow AD=BC=10\ cm$ …………………………………….....1p

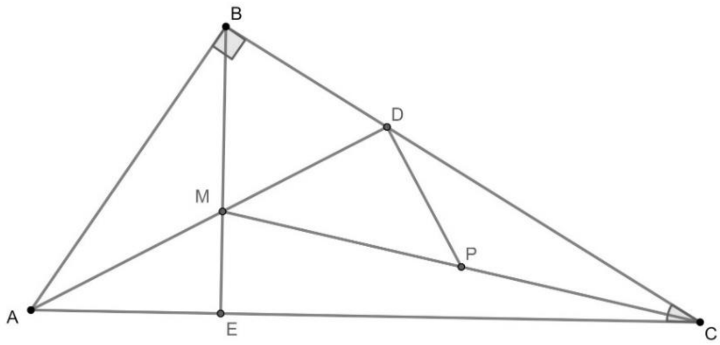
Construim $OM \perp CD, ON \perp AB, M \in AB, N \in CD$

$MN = OM + ON = \frac{AB}{2} + \frac{CD}{2} = 7\sqrt{2}cm$ ………………………………………………………1p

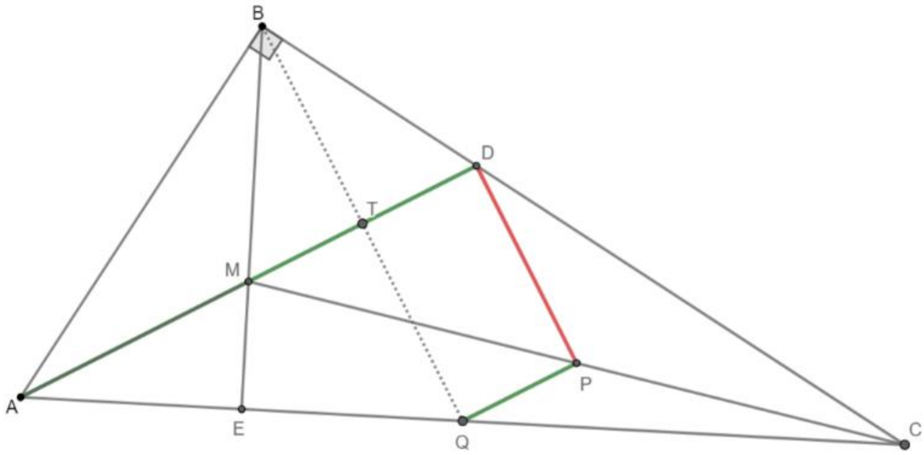
c) $A_{ABCD} = \frac{(AB+CD)\cdot MN}{2} = 98\ cm^2$ ………………………………………………………2p

Problema 4.

Fie ΔABC cu $\measuredangle B = 90^\circ$ și $\measuredangle C = 30^\circ$.
Notăm cu M intersecția dintre bisectoarea $AD, D \in BC$ și înălțimea $BE, E \in AC$.
Știind că P este mijlocul lui CM, arătați că $4 \cdot DP = AC$.



Soluție:



Fie $DQ \perp AC$. Cum ΔADC -isoscel $\Rightarrow Q -$ mijloc $AC \Rightarrow PQ -$ linie mijlocie în ΔMCA

$\Rightarrow PQ \parallel AM, PQ = \frac{AM}{2}$. Fie $BQ \cap AD = \{T\} \Rightarrow T -$ mijlocul segmentului BQ. ……………………….1p

$\Delta MBD -$ echilateral $\Rightarrow$ TD$= \frac{1}{2}MD = \frac{1}{2}AM = PQ$. ……………………………………………2p

Cum $TD \parallel PQ, \measuredangle DTQ = 90^\circ \Rightarrow TQPD$ -dreptunghi. ……………………………………………2p

$\Rightarrow DP = TQ = \frac{1}{2}AQ = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}AC = \frac{1}{4}AC$. $4\cdot DP = AC$ ………………………………………2p